**CHUYÊN ĐỀ 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC**

**Hệ thống bài tập sử dụng trong chuyên đề**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tỉnh, huyện, thành phố | Năm học | Tỉnh, huyện, thành phố | Năm học |
| Chuyên An Giang | 2018 | Chuyên An Giang | 2018 |
| Chuyên Bắc Ninh | 2014; 2017 | Chuyên Bắc Ninh | 2014; 2017 |
| Chuyên Bắc Giang | 2018 | Chuyên Bắc Giang | 2018 |
| Chuyên Bạc Liêu | 2019 | Chuyên Bạc Liêu | 2019 |
| Chuyên Bến Tre vòng 2 | 2019 | Chuyên Bến Tre vòng 2 | 2019 |
| Chuyên Bình Dương | 2018 | Chuyên Bình Dương | 2018 |
| Chuyên Cao Bằng vòng 2 | 2019 | Chuyên Cao Bằng vòng 2 | 2019 |
| Chuyên Gia Lai vòng 2 | 2019 | Chuyên Gia Lai vòng 2 | 2019 |
| Chuyên KonTum vòng 2 | 2019 | Chuyên KonTum vòng 2 | 2019 |
| Chuyên Cần Thơ | 2019 | Chuyên Cần Thơ | 2019 |
| Chuyên Quảng Ninh | 2017; 2019 | Chuyên Quảng Ninh | 2017; 2019 |
| Chuyên Hưng Yên | 2017, 2018 | Chuyên Hưng Yên | 2017, 2018 |
| chuyên Toán Ninh Bình | 2017; 2019 | Chuyên Ninh Bình, chuyên Toán Ninh Bình | 2017; 2019 |
| Chuyên Thừa Thiên Huế | 2017 | Chuyên Thừa Thiên Huế | 2017 |
| Chuyên Toán Hà Nam | 2019 | Chuyên Toán Hà Nam | 2019 |
| Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định | 2015, 2017, 2018 | Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định | 2015, 2017, 2018 |
| Chuyên Toán Nam Định | 2019 | Chuyên Toán Nam Định | 2019 |
| Chuyên Thái Bình | 2017; 2018; 2019 | Chuyên Thái Bình | 2017; 2018; 2019 |
| Chuyên Tin Thái Nguyên | 2019 | Chuyên Tin Thái Nguyên | 2019 |
| Chuyên Tiền Giang vòng 2, chuyên Tin Tiền Giang vòng 2 | 2018, 2019 | Chuyên Tiền Giang vòng 2, chuyên Tin Tiền Giang vòng 2 | 2018, 2019 |
| Chuyên Lào Cai | 2017 | Chuyên Lào Cai | 2017 |
| Chuyên Lâm Đồng vòng 2 | 2019 – | Chuyên Lâm Đồng vòng 2 | 2019 |
| Chuyên Lâm Đồng vòng 2 | 2019 | Chuyên Lâm Đồng vòng 2 | 201 |
| Chuyên Sư Phạm Hà Nội | 2015, 2016, 2017, 2018 | Chuyên Sư Phạm Hà Nội | 2015, 2016, 2017, 2018 |
| Chuyên Trà Vinh | 2018 | Chuyên Trà Vinh | 2018 |
| Chuyên Toán Bến Tre | 2018 | Chuyên Toán Bến Tre | 201 |
| Chuyên Toán Bình Định và chuyên vòng 2 | 2018, 2019 | Chuyên Toán Bình Định và chuyên vòng 2 | 201, 2019 |
| Chuyên Hưng Yên | 2018; 2019 | Chuyên Hưng Yên | 2018; 2019 |
| Chuyên Nam Định | 2018 – 2019 | Chuyên Nam Định | 2018 |
| Chuyên An Giang | 2018 – 2019 | Chuyên An Giang | 2018 |
| Chuyên Phú Yên vòng 2 | 2019 – 2020 | Chuyên Phú Yên vòng 2 | 2019 |
| Chuyên Quảng Ngãi | 2019 – 2020 | Chuyên Quảng Ngãi | 2019 |
| Chuyên Quảng Trị | 2018 - 2019 | Chuyên Quảng Trị | 2018 |
| Chuyên Sơn La vòng 2 | 2019 - 2020 | Chuyên Sơn La vòng 2 | 2019 |
| Đại Học Ngoại Ngữ Hà Nội | 2010, 2014, 2017 | Đại Học Ngoại Ngữ Hà Nội | 2010, 2014, 2017 |
| Học sinh giỏi TP Bắc Giang | 2016 | Học sinh giỏi TP Bắc Giang | 2016 |
| Học sinh giỏi Hòa Bình | 2010 | Học sinh giỏi Hòa Bình | 2010 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Điện Biên | 2018 | Học sinh giỏi Tỉnh Điện Biên | 2018 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Lạng Sơn | 2019; | Học sinh giỏi Tỉnh Lạng Sơn | 2019; |
| Học sinh giỏi Long An | 2012 | Học sinh giỏi Long An | 2012 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Quảng Bình | 2018 | Học sinh giỏi Tỉnh Quảng Bình | 2018 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Bình Phước | 2018 | Học sinh giỏi Tỉnh Bình Phước | 2018 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Lai Châu | 2018 | Học sinh giỏi Tỉnh Lai Châu | 2018 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Thái Bình | 2018 | Học sinh giỏi Tỉnh Thái Bình | 2018 |
| Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa | 2013; 2016; 2017 | Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa | 2013  2016  2017 |
| Học sinh giỏi Phú Thọ | 2012 - 2013 | Học sinh giỏi Phú Thọ | 2012 |
| Học sinh giỏi Hải Dương |  | Học sinh giỏi Hải Dương |  |
| Học sinh giỏi Nam Định |  | Học sinh giỏi Nam Định |  |
|  |  | Học sinh giỏi Tỉnh Sóc Trăng | 2020 |
| Học sinh giỏi Huyện Đan Phượng | 2018 | Học sinh giỏi Huyện Đan Phượng | 2018 |
| Học sinh giỏi Huyện Hoằng Hóa | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Hoằng Hóa | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Quan Sơn | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Quan Sơn | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Chương Mỹ vòng 1 và vòng 2 | 2019; 2020 | Học sinh giỏi Huyện Chương Mỹ vòng 1 và vòng 2 | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Ba Đình | 2017 | Học sinh giỏi Huyện Ba Đình | 2017 |
| Học sinh giỏi Huyện Bắc Từ Liêm | 2018 | Học sinh giỏi Huyện Bắc Từ Liêm | 2018 |
| Học sinh giỏi Huyện Đức Cơ | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Đức Cơ | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Như Thanh | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Như Thanh | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Triệu Phong | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Triệu Phong | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Thường Tín | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Thường Tín | 2019 - 2020 |
| Học sinh giỏi Huyện Ba Vì | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Ba Vì | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Ba Thước | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Ba Thước | 202019 |
| Học sinh giỏi Huyện Đan Phượng | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Đan Phượng | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Thanh Xuân | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Thanh Xuân | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Mỹ Đức | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Mỹ Đức | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Cầu Giấy | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Cầu Giấy | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Quan Sơn | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Quan Sơn | 2019 |
| Học sinh giỏi Huyện Cẩm Thủy Thanh Hóa | 2019 | Học sinh giỏi Huyện Cẩm Thủy Thanh Hóa | 2020 |
| Học sinh giỏi Huyện Đông Hà Quảng Trị | 2020 | Học sinh giỏi Huyện Đông Hà Quảng Trị | 2020 |
| Học sinh giỏi TP Thanh Hóa | 2020 | Học sinh giỏi TP Thanh Hóa | 2020 |

**A. BÀI TOÁN VỀ CĂN THỨC**

**Bài 1:** Chuyên Bình Định vòng 2, năm học 2019 – 2020

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có: 



+) 



+) 



Do đó 

Vậy .

Cách khác:

Ta có: 

+) 

Do đó 

Vậy .

**Bài 2:** Chuyên Tỉnh Bạc Liêu, năm học 2019 – 2020

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có: 





**Bài 3:** Chuyên Tỉnh Bến Tre vòng 2, năm học 2019 – 2020

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 

Vậy 

**Bài 4:** Chuyên Tỉnh Gia Lai vòng 2, năm học 2019 – 2020

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 

Vậy 

**Bài 5:** Chuyên KonTum vòng 2, năm học 2019 – 2020

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 



Vậy 

**Bài 6:** Chuyên Tỉnh Lâm Đồng vòng 2, năm học 2019 – 2020

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta tính được  và 

Do đó 

Vậy 

**Bài 7:** Chuyên Tỉnh Nam Định chuyên Toán, năm học 2019 – 2020

Cho . Tính 

**Lời giải**

Ta có 



Do  hay 

Vậy .

**Bài 8:** Chuyên Tỉnh Ninh Bình chuyên Toán, năm học 2019 – 2020

Rút gọn 

**Lời giải**

Ta có:





Vậy .

**Bài 9:** Chuyên Tỉnh Sơn La vòng 2, năm học 2019 – 2020

Cho  Tính 

**Lời giải**

Ta có: 



Vậy 

**Bài 10:** Chuyên Tỉnh Thái Nguyên, chuyên Tin, năm học 2019 – 2020

Cho  . Không sử dụng máy tính bỏ túi chứng minh  là số nguyên tố

**Lời giải**

Ta có





Vậy  là số nguyên tố.

**Bài 11:** Chuyên Tin Tiền Giang, năm học 2019 – 2020

Rút gọn 

**Lời giải**

Ta có 



Vậy 

**Bài 12:** Chuyên Tiền Giang vòng 2, năm học 2019 – 2020

Cho . Tính 

**Lời giải**

Ta có 



Vậy .

**Bài 13:** Tuyển Sinh chuyên Quảng Trị, năm học 2018 – 2019

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 



Vậy 

**Bài 14:** Tuyển Sinh chuyên Tiền Giang, năm học 2018 – 2019

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có: 

Vậy 

**Bài 15:** Tuyển Sinh chuyên Bình Dương, năm học 2018 – 2019

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Với , ta có 



Áp dụng kết quả, ta được:



**Bài 16:** Tuyển Sinh chuyên An Giang, năm học 2018 – 2019

Rút gọn 

**Lời giải**

Ta có:



+) 



Vậy 

Vậy 

**Bài 17:** Học sinh giỏi Tỉnh Hòa Bình, năm học 2011 – 2011

Rút gọn 

**Lời giải**

Đặt , ta có 

Xét 





Vậy .

**Bài 18:** Học sinh giỏi Phú Thọ, năm học 2012 – 2013

Rút gọn 

**Lời giải**

Ta có 



Vậy .

**Bài 19:** Học sinh giỏi TP Bắc Giang, năm học 2016 – 2017

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có:







Vậy 

**Bài 20:** Học sinh giỏi Long An, năm học 2012

Tính 

**Lời giải**

Ta có



.

**Bài 21:** HSG huyện Nga Sơn Thanh Hóa, năm học 2016 - 2017

Rút gọn 

**Lời giải**

Ta có: 



Vậy .

**Bài 22:** HSG Tỉnh Quảng Nam, năm học 2020 - 2021

Rút gọn biểu thức 

Và 

**Lời giải**

a) Ta có 

.

b) Đặt 

suy ra 









Vậy .

**Bài 23:** HSG Tỉnh Bình Dương, năm học 2020 - 2021

Tính giá trị của biểu thức  với 

**Lời giải**

Ta có:



Thay  vào ta được: 

Vậy  với 

**Bài 24:** HSG Tỉnh Đồng Tháp, năm học 2020 - 2021

Tính giá trị của biểu 

**Lời giải**

1. Ta có 





**Bài 25:** HSG Tỉnh Quảng Nam, năm học 2020 - 2021

Rút gọn các biểu thức sau

a) 

b) 

**Lời giải**

a)  





Đặt , 

Suy ra 







 







 (Vì ). Vậy 

**Bài 26:** HSG Quận Tây Hồ, năm học 2020 - 2021

Tính giá trị biểu thức , biết 

**Lời giải**

Ta có 

Xét 

Hay 

Vậy .

**Bài 27:** HSG Huyện Ba Vì, năm học 2020 - 2021

Cho hàm số  Tính giá trị của  tại 

**Lời giải**

a) Hàm số  Tính giá trị của tại .

Ta có 







Khi đó .

Do đó .

Vậy .

**Bài 28:** HSG Huyện Thiệu Hóa, năm học 2020 - 2021

Tính giá trị biểu thức  với 

**Lời giải**

Vì 

Do đó:

.

**Bài 29:** HSG Thị Xã Hoài Nhơn, năm học 2020 - 2021

Rút gọn các biểu thức:

a) 

b) 

c) 

**Lời giải**

a) Ta có: 



b) Đặt và 





Ta có: 



( Vì )

Vậy .

c) Ta có: .

Áp dụng đẳng thức trên lần lượt với  ta được:

.

**Bài 30:** HSG Huyện Tiên Du, năm học 2020 - 2021

Tính giá trị biểu thức , biết rằng  và 

**Lời giải**

Ta có:





Tương tự 

Vậy ta có kết quả .

**C: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC CHỨA CĂN**

**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức sau

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Với  ta có 





……………….



Cộng vế với vế ta được 

Với 

b) Với  ta có 

Hoặc 

Ta có 



………………..



Với 

**Bài 2:** Chuyên Vinh Nghệ An

Cho . Tính 

**Lời giải**

Đặt  và 



Tương tự: 

Và 



**\*) Nhận xét:** Ta có bài toán tương tự sau

Cho 2 số m, n sao cho 

Đề bài 

Tính , kết quả ta được 

**Bài 3:**

Cho . Tính 

**Lời giải**

*Phân tích:* 

Chọn 1 cặp số 

Nhận thấy 

Vậy 

**Bài 4:**

Chứng minh rằng  là một số nguyên

**Lời giải**

Đặt  và 

Ta có 

Vậy  là một số nguyên.

**Bài 5:**

Cho . Hãy tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Đặt 

Thay vào biểu thức  ta có: 

Khai triển biểu thức trên ta được 

**Bài 6:** *Chuyên An Giang, năm học 2018 - 2019*

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có

+ 

+ 

.

**Bài 7:** *Học sinh giỏi huyện Thiệu Phong, năm học 2019- 2020*

Cho biểu thức . Chứng minh D là nghiệm của phương trình 

**Lời giải**

Ta có 









Ta có 

Vậy bài toán được chứng minh.

**Bài 8:** *Chuyên Bình Định, năm học 2019 - 2020*

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 



- 



- 



Do đó 

**Bài 9:** *Chuyên Bạc Liêu, năm học 2019 - 2020*

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có







**Bài 10:** *Chuyên Bến Tre vòng 2, năm học 2019 - 2020*

Tính gía trị của biểu thức 

**Lời giải**

Có 

**Bài 11:** *Chuyên Lâm Đồng vòng 2, năm học 2019 - 2020*

Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 

Vậy 

**Bài 12:** *Chuyên Toán Nam Định, năm học 2019 - 2020*

Cho  Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có 



- Do  nên  hay , do đó .

**Bài 13:** *Chuyên Toán Ninh Bình, năm học 2019 - 2020*

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có



.

**Bài 14:**

Biết . Tính giá trị biểu thức 

**Lời giải**

Ta có: 

Lại có 



Vậy 

**Bài 15:** Học sinh giỏi Hải Dương

Tính giá trị biểu thức , với 

**Lời giải**

Ta có 

Đặt 



Từ đó 



Từ đó 

**Bài 16:**

Cho hai số thực , thỏa mãn . Tính 

**Lời giải**

Ta có 

Nhân liên hợp 2 vế của  với 



Nhân liên hợp 2 vế của  với 



Cộng tương ứng (1)(2) ta có: 

**Bài 17:** Học sinh giỏi Hà Tĩnh

Tính tổng , biết 

**Lời giải**

Ta có



 (hiệu sai phân)

Vậy 

**Bài 18:** Chuyên SPHN

Gọi  là nghiệm dương của phương trình . Không giải phương trình hãy tính 

**Lời giải**

Vì  là nghiệm của phương trình



Xét  (loại)

Nhân liên hợp C với  ta được:







**Bài 19:** HSG Tỉnh Tuyên Quang, năm học 2020 - 2021

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

a) Ta có:















**Bài 20:** HSG Tỉnh Bình Dương, năm học 2020 - 2021

Rút gọn biểu thức 

**Lời giải**

Ta có :





**D: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC**

**Bài 1:** HSG Nam Định

Cho  thỏa mãn  và . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có 

 (đpcm).

**Bài 2:**

Cho  và . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Ta có đpcm 

 (luôn đúng do giả thiết).

**Bài 3:**

1) Cho  là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng biểu thức sau là số hữu tỉ: 

2) Chứng minh rằng 

**Lời giải**

a) Áp dụng bài 2 ta có:

Xét  và 



b) Ta có





 (đpcm).

**Bài 4:** HSG Phú Thọ

Cho ba số dương  thỏa mãn  Tính giá trị của biểu thức sau:



**Lời giải**

Đặt 

+) 

+) 

+) 

Vậy 

**Bài 5:**

Cho ba số dương  và . Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

Từ giả thiết ta 



Chú ý: 

+) 

Tương tự ta có: 

 (đpcm).

**Bài 6:**

Cho ba số dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Đặt 

Ta có 



**Bài 7:** HSG Tỉnh Thái Bình, năm học 2020 - 2021

Cho 

a) Chứng minh rằng 

b) Tính giá trị biểu thức 

**Lời giải**

a) Ta có: 

 (điều phải chứng minh)

b) Ta có:  (chứng minh trên)















Vậy 

**E: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

**Bài 1:** HSG Nam Định

1) Chứng minh rằng  (2017 chữ số 2)

2) Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

1) Ta có  (2016 chữ số 2)

 (2015 chữ số 2) (đpcm)

2) Nhân cả tử và mẫu với  ta được:



Ta có 

**Bài 2:**

1) Chứng minh rằng  thì 

2) Áp dụng, chứng minh rằng: 

**Lời giải**

1) Phân tích: Ta có 

Áp dụng ta có: 

2) Ta có: 





.....



Cộng từng vế tương ứng ta có:



 (đpcm).

**Bài 3:**

Chứng minh rằng  thì 

**Lời giải**

Ta đưa về dạng tổng sai phân: 

Ta có 





Áp dụng ta có: 

 (đpcm).

**Bài 4:**

Cho  là các số dương. Chứng minh rằng tồn tại một số dương trong hai số  và 

**Lời giải**

Xét tổng hai số: 

 đpcm.

**Bài 5:**

Tính tổng .

**Lời giải**

Ta có  với 





**Bài 6:**

Tính giá trị biểu thức  biết 

**Lời giải**

Ta có bất đẳng thức Cauchy Schwars: 

Dấu “=” xảy ra 

Áp dụng ta có: 

Điều kiện: 

Dấu “=” xảy ra 



**Bài 7:** HSG Huyện Thanh Oai

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  ta có: 

**Lời giải**

Chứng minh được công thức tổng quát:

.

Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra:

.

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

 suy ra đpcm.

**Bài 8:** HSG Huyện Tiên Du, năm học 2020 - 2021

Cho . Chứng minh 

**Lời giải**

Ta có 







Vậy .

**F: SỐ HỮU TỈ. SỐ VÔ TỈ**

**Bài 1:**

Cho 

a) Tìm các số nguyên  để  nguyên

b) Tìm các số hữu tỉ  để  nguyên

**Lời giải**

a) Ta có 

Để . Từ đó tìm được các giá trị của 

b) Đặt 

Điều kiện của  là 

Vậy , với  thì  nguyên.

**Bài 2:**

a) Chứng minh rằng  là số vô tỉ

b) Tổng quát, nếu  là số nguyên dương không chính phương thì  là số vô tỉ

c) Tính chất: Nếu  là số nguyên dương không chính phương,  hữu tỉ và  thì 

**Lời giải**

\*) Lưu ý: 

a) Gỉa sử  là số hữu tỉ  với 



Vậy  vô lí  là số vô tỉ

b) Ta phân tích 

Tổng quát: 

Ta đi chứng minh  là số vô tỉ

Phản chứng: Giả sử  là số hữu tỉ 





Từ (1)(2)  vô lí (đpcm)

c) Từ giả thiết  là số vô tỉ (chứng minh ý b)

Nếu  (đúng)

 (vô lí)  đpcm.

**Bài 3:**

Cho ba số  là số hữu tỉ. Chứng minh rằng  đều là các số hữu tỉ

**Lời giải**

Đặt 



Mà  (đpcm).

**Bài 4:**

Cho  là ba số hữu tỉ và  là nghiệm của phương trình  với  là số nguyên dương không chính phương. Tìm các nghiệm còn lại

**Lời giải**

Theo chứng minh trên, ,  không là chính phương 

Giả thiết:  là nghiệm của phương trình 



Nếu  (vô lý)



Vậy  thay vào phương trình ta có:



Vậy các nghiệm còn lại là:  và .

**G: LUYỆN TẬP CĂN THỨC**

**Bài 1:**

Hãy lập phương trình  với hệ số nguyên có một nghiệm là 

**Lời giải**

Ta có: 

Có 

Đặt 

Phương trình  có  là nghiệm.

**Bài 2:**

Tìm GTNN của biểu thức 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhắc lại:  dấu “=” xảy ra 

Ta có: 



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của 

**Bài 3:** SPHN, năm học 2016

Cho  thỏa mãn điều kiện . Tính giá trị của biểu thức 

**Lời giải**

Ta có giả thiết



Từ đó ta có 

Vậy 

+) Nếu 

+) Nếu .

**Bài 4:**

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn A

b) Tìm x, y sao cho  và 

**Lời giải**

a) Ta có 

b) Theo giải thiết ta có  2 trường hợp.

**Bài 5:**

Cho 

a) Chứng minh rằng: 

b) Tính 

**Lời giải**

a) Ta có 

b) Từ 

Thay vào S ta được



Ta chứng minh  (đúng)

Từ 



Vậy 

**Bài 6:** Chuyên Nam Định, năm học 2017

Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 



Ta có  và 

Với 

Do 

**Bài 7:** Đại học Ngoại Ngữ - Hà Nội, năm học 2017

Cho 

a) Rút gọn P

b) Tìm x để 

**Lời giải**

a) Đặt 

Với  điều kiện 



b) 

**Bài 8:** Đại học Sư Phạm - Hà Nội, năm học 2017

Giả sử  là hai số thực phận biệt thỏa mãn điều kiện 

Tính 

**Lời giải**

Điều kiện 

Theo giả thiết ta có 





**Bài 9:** *Chuyên Sư Phạm - Hà Nội Vòng 1, năm học 2018*

Cho  với 

a) Chứng minh 

b) Tìm a, b biết rằng  và 

**Lời giải**

a) Ta có





b) 

Ta có: 

Vì  nên 

Vậy 

**Bài 10:** *Chuyên Toán Bình Định, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Chứng tỏ 

**Lời giải**

a) Ta có



Vậy 

b) Ta có  (vì ).

**Bài 11:** *Chuyên Toán Hà Nam, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) So sánh  và 

**Lời giải**

a) Ta có 









Do 

Xét  Vậy 

**Bài 12:**

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) So sánh  và 

c) Tìm  thỏa mãn điều kiện: 

**Lời giải**

Điều kiện 

a) Ta có 



b) Ta có  Dấu “=” xảy ra khi 

c) Ta có: 

Chi cả hai vế cho  ta thu được  Đặt , với  ta có:



- Với  (vô nghiệm)

- Với  (thỏa mãn)

**Bài 13:**

Cho biểu thức  với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của  khi 

c) Tìm các giá trị của  để  là số tự nhiên

**Lời giải**

a) Ta có:





b) Với 

c) Ta có 

Do  Vì P là số nguyên nên 



Đối chiếu với điều kiện ta thấy  là các giá trị cần tìm.

**Cách khác:** Để P là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là  (m là số nguyên dương )

Ta có  do  điều kiện  do đó 

 hay .

**Bài 14:** Chuyên Nam Định, năm học 2018 - 2019

Cho biểu thức 

a) Chứng minh 

b) Chứng minh rằng nếu  thì 

**Lời giải**

a) Ta có 

 (đpcm)

b) 

Với , ta có 

**Bài 15:** *Chuyên Nam Định, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Chứng minh rằng 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Chứng minh rằng 

Có  (luôn đúng với mọi y)

**Bài 16:** *Chuyên Thái Bình, năm học 2017 - 2018*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Đặt  Chứng minh rằng với 

**Lời giải**

a) Ta có 

Vậy  với 

b) với , ta có 

**Bài 17:** *Chuyên Bắc Ninh vòng 2, năm học 2019 - 2020*

Tính giá trị của biểu thức  khi 

**Lời giải**

Ta có 

Có ;



**Bài 18:** Phát triển đề tuyển sinh vào 10 TPHN

Cho hai biểu thức  và 

a) Tính giá trị của biểu thức  khi 

b) Rút gọn biểu thức 

c) Tìm  nguyên để  nguyên

d) Tìm  của 

e) Tìm  để  nguyên.

**Lời giải**

a) Tính được 

b) Rút gọn được 

c) Ta có 

Vì 

Mà 

Với 

d) Vì , dấu “=” xảy ra 

e) Dễ thấy 

+) Với 

+) Với 

Vậy  thì  nguyên.

**Bài 19: Chuyên Ngữ, năm 2014**

Cho 

a) Rút gọn 

b) Tìm  để 

c) Tìm  để 

**Lời giải**

Điều kiện xác định: 

Ta có 

+) 

+) 



Ta có 

\*) Chú ý: Muốn biết kết quả đúng hay sai ta sẽ thay một vài giá trị bất kỳ của  vào biểu thức ban đầu và biểu thức rút gọn, nếu hai kết quả bằng nhau thì kết quả rút gọn đúng 99,99%.

b) 

Vậy 

c) 

+) TH1: 

+) TH2:  vô nghiệm.

Vậy  và  thì .